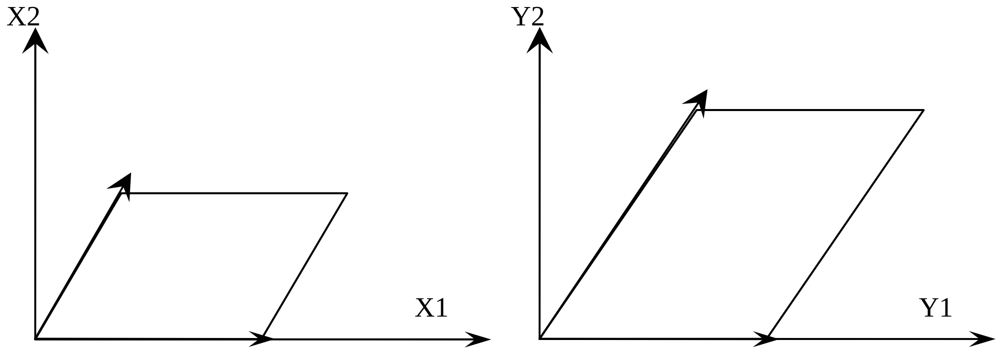
線形代数レポート　　　経営　１年　01121123　袁黄琳

行列 A は $A = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ である。

問題①

$\vec{a} = (a_x, a_y)$　$\vec{b} = (b_x, b_y)$　$A\vec{a} = \lambda\vec{a} = \vec{a}'$　$A\vec{b} = \lambda'\vec{b} = \vec{b}'$

$S^{'} = \lambda^{'}\lambda S$　を証明しましょう。




問題②

$D = ad - bc = \lambda\lambda^{'}$ を証明しましょう。

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

　証明する前に、まずベクトル、行列と固有値について説明しましょう。

　広義には、ベクトルには始点を原点にか限る必要はない。

【線形代数】　線形代数(line algebra)は、線形関数つまり１次関数を扱う代数である。実用的には多元連立１次方程式を効率よく解法する手法を習う学問である。線形代数には、その骨格はをなす構成要素として、ベクトル(vector)、行列(matrix)および行列式(determinant)の 3 つが挙げられる。

【ベクトル】(vector)　ベクトルは基本的には「複数の変数からなる数の集まり」とみなすことができる。（実際に位置ベクトル(position vector)と呼ばれる）次のように、ベクトルが「大きさ(magnitude)と方向(direction)をもった量(quantity)あるいは存在(entity)」であると考えたときである。

【行列】「行列は複数の行と列からできた数字の集まりである」という定義をすると、ベクトルは行列において、行(row)あるいは列(column)が１列のものと定義することができる。つまり、ベクトルは行列の特殊な１形態ということになる。

$$\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

行列　ベクトル

【固有値】任意の行列 A があったときに、適当な実数 $\lambda$ をつかって、ベクトル $\vec{x}$ が

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

の関係で結ばれるとき、ベクトル$\vec{x}$を行列 A の固有ベクトルとよび、$\lambda$を固有値と呼んでいる。ベクトル$\vec{x}$に行列 A に相当する１次変換を施したときに、このベクトルの実数倍になる変換でしかないと言う意味である。

【一次変換の概念】: ベクトルに行列を作用させると、別なベクトルに変わることになる。このとき、新しいベクトルの成分は、もとのベクトルの成分の線形結合(あるいは 1 次結合)となっているので、このような変換を 1 次変換あるいは線形変換(linear transformation) と呼んでいる。

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

いま二つのベクトル　$\vec{a} = (a_x, a_y)$　$\vec{b} = (b_x, b_y)$　を並列に述べて行列をつくる。すると、その行列式は

$$\det\begin{pmatrix}\vec{a} \\ \vec{b}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

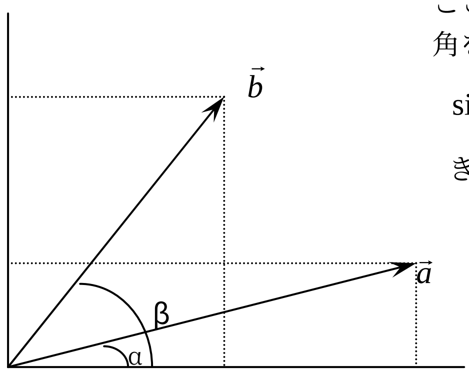
と計算できる。行列式の性質から、ベクトルを列ベクトルとして並べた場合も同じ値が得られる。

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

実は、この値は、これらベクトルをそれぞれ辺とする平行四辺形の面積となる。実際に確かめてみよう。この平行四辺形の面積は

$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$　（$S' = |\vec{a}'||\vec{b}'|\sin\theta$）で与えられる。ここで、θ は二つのベクトルがなす角の大きさであるが、1 次変換するとき θ は変わらない。ベクトルの大きさは、ピタゴラスの定理を使って、$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$

$\because \lambda\vec{a} = \vec{a}'$　$\lambda\vec{b} = \vec{b}'$　$\therefore |\vec{a}'| = \lambda|\vec{a}|, |\vec{b}'| = \lambda|\vec{b}|$　　　$\therefore S' = \lambda'\lambda S$




ここで、図のように、それぞれのベクトルが x 軸となす角を α、β とすると、三角関数の加法定理より

$\sin\theta = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$ と変形できる。ここで

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \sin\beta = \frac{b_y}{|\vec{b}|}, \cos\beta = \frac{b_x}{|\vec{b}|}$$

の関係にあるので、これらを上式に代入すると

$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\left(\frac{b_y}{|\vec{b}|}\frac{a_x}{|\vec{a}|} - \frac{b_x}{|\vec{b}|}\frac{a_y}{|\vec{a}|}\right) = a_x b_y - a_y b_x$　となって、確かに平行四辺形の面積となっている。

$$\therefore \quad S = \det(\vec{a},\vec{b}) \; S' = \det(\vec{a}',\vec{b}')$$

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a} = \vec{a}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_x + ba_y \\ ca_x + da_y \end{pmatrix}$$

$$A\vec{b} = \lambda\vec{b} = \vec{b}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_x + bb_y \\ cb_x + db_y \end{pmatrix}$$

$$S = \det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

$$S' = \det(\vec{a}',\vec{b}') = \begin{vmatrix} aa_x + ba_y & ab_x + bb_y \\ ca_x + da_y & cb_x + db_y \end{vmatrix} = (aa_x + ba_y)(cb_x + db_y) - (ca_x + da_y)(ab_x + bb_y)$$

$$= (ad - bc)(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\therefore S' = S \bullet (ad - bc)$$

$S' = \lambda'\lambda S$ より　　$\therefore \quad \lambda'\lambda = ad - bc = D$

以上です。